

Le immagini a raggi x in campo medico

Stefano Cangialosi

18 marzo 2009

Indice

1	Fisica delle immagini	2
1.1	Introduzione	2
1.2	Formazione delle immagini	3
1.2.1	Immagini radiografiche	3
1.3	Processi di interazione	4
1.4	Componenti di un sistema per la produzione di raggi x	6
1.4.1	Radiazione da frenamento	7
1.4.2	Radiazione caratteristica	9
1.4.3	L'importanza della filtrazione	10
1.4.4	La tensione di alimentazione	11
1.4.5	Collimazione del fascio	11
1.4.6	L'effetto tacco	12
1.5	Interazione dei raggi-x con il corpo	13
2	Qualità delle immagini	14
2.1	Introduzione	14
2.1.1	Contrasto	14
2.1.2	Il mezzo di contrasto	16
2.1.3	Sfocatura	17
2.1.4	Rumore e modello di Rose	20
2.1.5	Distorsione	21
2.2	Risoluzione spaziale	21
3	Esercizi	27
3.1	Sorgenti gamma	27
3.2	Metodo M.I.R.D. per il calcolo della dose assorbita in un organo	29

Capitolo 1

Fisica delle immagini

1.1 Introduzione

Con il termine di *Medical Imaging* si indica un processo complesso di elaborazione dell'informazione attraverso il quale è possibile ottenere una immagine che ha lo scopo di visualizzare gli organi del corpo umano ai fini di una chiara diagnosi da parte del medico o del radiologo che deve interpretarla. Nonostante sia passato più di un secolo dalla prima fotografia a *raggi x*, soltanto negli ultimi quarant'anni abbiamo assistito alla nascita di differenti metodi d'indagine medica, ognuno dei quali rivela differenti caratteristiche e funzionalità del corpo umano. Ogni metodo di indagine si avvale di una propria tecnologia, ha dei vantaggi e dei limiti che lo rendono specifico per un particolare tipo di applicazione. L'obiettivo di ogni sistema di imaging è quello di riuscire ad ottenere la massima quantità di informazione dall'oggetto dell'indagine che è il paziente stesso; in questo caso svolgono un ruolo importantissimo sia l'operatore che deve controllare e modificare le variabili specifiche di ogni sistema, sia il medico o il radiologo che deve interpretare l'immagine affinché possa valutarla correttamente.

1.2 Formazione delle immagini

La luce visibile permette ai nostri occhi di vedere tutto ciò che ci sta attorno, la superficie degli oggetti, i loro contorni, tuttavia la radiazione visibile ha una scarsa capacità di penetrazione all'interno della materia. Per poter vedere in profondità nella materia, nel nostro caso attraverso il corpo umano, dobbiamo disporre di qualche forma diversa di energia. Non solo questa energia deve attraversare il corpo umano ma deve anche interagire con esso, altrimenti non si avrebbe nessun tipo di informazione da rivelare. Lo spettro elettromagnetico al di fuori della luce visibile si rivela interessante da questo punto di vista. Ad esempio i raggi-x trovano la loro applicazione in radiologia mammografia e tomografia computerizzata, campi elettromagnetici a radio frequenza nella risonanza magnetica nucleare, raggi gamma nella medicina nucleare. Come energia meccanica troviamo le onde sonore ad alta frequenza nell'imaging ad ultrasuoni.

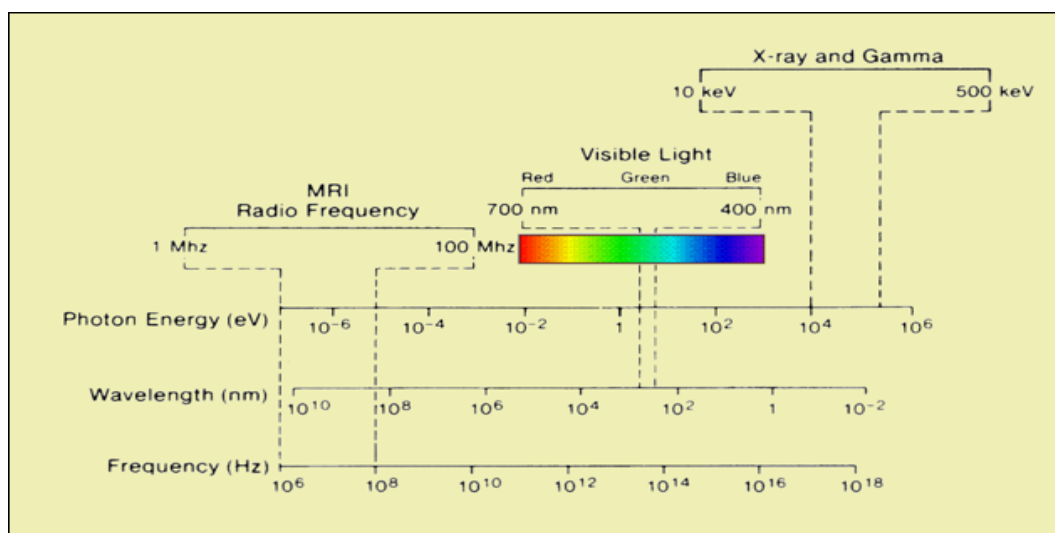


Figura 1.1: spettro elettromagnetico

1.2.1 Immagini radiografiche

Nonostante la radiografia ha fatto la sua comparsa più di un secolo fa, è tutt'oggi il metodo di indagine più diffuso e utilizzato. Infatti si deve la sua nascita a W. Roentgen che nel 1895 ha scoperto i raggi-x. Da allora abbiamo assistito ad un'evoluzione delle apparecchiature medicali, ma il principio di funzionamento è rimasto invariato. La radiografia sfrutta una sorgente

(tubo radiogeno) che emette in un tempo brevissimo (tipicamente meno di mezzo secondo) un fascio di raggi-x che investono il paziente e raggiungono il detector formando così l'immagine radiografica.

1.3 Processi di interazione

Quando un fascio di radiazioni indirettamente ionizzanti attraversa un mezzo materiale, può avvenire che i fotoni siano soggetti a:

1. assorbimento durante una o più interazioni;
2. diffusione (scattering) durante una o più interazioni, oppure
3. possono attraversare il mezzo materiale senza alcuna interazione.

Il processo di trasmissione dei fotoni quando attraversano un mezzo materiale segue la legge del decadimento esponenziale. Il numero di fotoni che attraversano una lastra di materiale di spessore x è:

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad (1.1)$$

dove I_0 è il numero di fotoni prima dell'attraversamento del mezzo e μ è il coefficiente di attenuazione per i fotoni. Notiamo che il prodotto μx deve essere adimensionale, in quanto argomento di un esponente. Pertanto se x è misurato in [cm], μ è misurato in $[cm]^{-1}$. In questo caso (ovvero quando μ è misurato in $[lunghezza]^{-1}$), μ prende il nome di *coefficiente di attenuazione lineare*. Il coefficiente μ dipende dall'energia del fascio e dal numero atomico del mezzo e ciò comporta la validità della (1.1) soltanto nel caso di fascio monoenergetico. Diversamente da quanto succede con le particelle cariche è possibile definire per i fotoni un *cammino libero medio* che rappresenta la distanza media percorsa prima che questi interagiscano col mezzo ed è uguale a $1/\mu$. La probabilità che i fotoni non interagiscano nella lastra di spessore x è $I/I_0 = e^{-\mu x}$. Questa probabilità è data dal prodotto delle probabilità che un fotone non interagisca mediante i cinque possibili processi:

- scattering coerente (ω);
- assorbimento fotoelettrico (τ);
- scattering Compton (σ);
- produzione di coppie (κ);
- fotodisintegrazione (π).

Scattering coerente

In questo tipo di interazione i fotoni non perdono energia e vengono semplicemente deviati dall'atomo dalla loro traiettoria originaria. E' tuttavia un fenomeno trascurabile data la sezione d'urto del processo molto bassa la quale decresce fortemente all'aumentare dell'energia.

Assorbimento fotoelettrico

Nell'effetto fotoelettrico tutta l'energia del fotone viene trasferita ad un elettrone interno di un atomo. L'elettrone viene quindi espulso dall'atomo con energia cinetica E_k pari alla differenza tra energia del fotone incidente $h\nu$ e l'energia di legame E_B :

$$E_k = h\nu - E_B$$

L'effetto fotoelettrico avviene con più probabilità con gli elettroni delle shell più interne (orbita K) e questo evento è tanto più probabile quanto più l'energia del fotone si avvicina all'energia di ionizzazione. La sezione d'urto pertanto decresce all'aumentare con l'energia ($\propto 1/E_p^3$) e mostra dei picchi in corrispondenza delle energie di legame delle shell K , L , M . L'effetto fotoelettrico è rilevante per energie fino a 0.5 MeV.

Scattering Compton

Lo scattering Compton avviene tipicamente con elettroni debolmente legati. Il fotone di energia $h\nu$ cede parte dell'energia ad un elettrone il quale viene espulso dall'atomo come elettrone di rinculo di energia E_k , mentre il fotone viene diffuso con energia $h\nu' = h\nu - E_k$ con un angolo θ rispetto alla direzione del fotone incidente. All'aumentare dell'energia del fotone incidente l'angolo diminuisce.

Produzione di coppie

La produzione di coppie avviene tipicamente nelle vicinanze di un nucleo con fotoni di energia superiore al MeV. Il fotone sparisce e viene a crearsi una coppia elettrone-positrone. Per l'equivalenza massa energia all'elettrone corrisponde circa una massa di 0.51 MeV, la creazione di una coppia richiede quindi una energia uguale o superiore di 1.02 MeV. L'energia in eccesso viene utilizzata come energia cinetica delle due particelle. Il processo può avvenire anche nelle vicinanze di un elettrone atomico, in questo caso si ha la produzione di tripletta (coppia più elettrone espulso). La soglia di attivazione del processo in questo caso è pari a 2.04 MeV. Data la grande

energia richiesta dai fotoni, è un fenomeno trascurabile nella produzione di immagini radiografiche.

Fotodisintegrazione

I processi di fotodisintegrazione avvengono quando un fotone di alta energia è assorbito dal nucleo atomico dando luogo all'emissione di un neutrone o di un protone (a seconda della reazione che avviene). Data la grande energia di soglia (alcuni MeV) della reazione, sono fenomeni che si possono trascurare per quanto riguarda la formazione delle immagini.

Sebbene a rigore dovremmo scrivere il coefficiente di attenuazione lineare come somma dei 5 termini, nel campo della diagnostica per immagini sono rilevanti solamente i processi di : assorbimento fotoelettrico e scattering Compton. In questo modo possiamo scrivere:

$$\mu = \tau + \sigma$$

1.4 Componenti di un sistema per la produzione di raggi x

L'imaging a raggi-x è stato il primo ed è tutt'ora il più diffuso metodo per indagare lo stato degli organi del corpo umano. Sebbene il metodo richieda l'uso di radiazioni ionizzanti potenzialmente pericolose per l'uomo, l'intensità delle radiazioni e il tempo di esposizione per fini diagnostici dovrebbero essere tali da non creare danni a breve o lungo termine al paziente e a chi lavora nei pressi delle sorgenti di raggi-x a patto di usare le opportune precauzioni. I tubi per la produzione di raggi x attualmente utilizzati derivano dal modello messo a punto nel 1913 dal fisico W. Coolidge. Il tubo consiste in una ampolla di vetro in cui viene fatto del vuoto spinto (circa $10^{-5}mmHg$) nella quale vengono accelerati elettroni. Gli elettroni sono prodotti per effetto termoionico ottenuto alimentando un filo di tungsteno con una corrente (2-4 A) a bassa tensione (6 V). Gli elettroni generati dal riscaldamento del filamento (catodo) vengono accelerati verso l'anodo mediante un potenziale che può variare da alcune decine fino alle centinaia di kV. Durante l'interazione con il bersaglio (tipicamente di tungsteno o molibdeno) gli elettroni perdono la loro energia in calore e in processi radiativi. Sebbene quasi tutta l'energia degli elettroni incidenti venga persa in calore (circa il 99%), i processi radiativi sono sufficienti per la produzione di raggi-x.

1.4.1 Radiazione da frenamento

Sappiamo dalla teoria classica che ogni particella carica accelerata emette un'onda elettromagnetica. Quando un elettrone passa nelle prossimità di un nucleo, il campo coulombiano del nucleo (che è carico positivamente) tende ad attrarre e a decelerare l'elettrone causando una perdita significativa di energia cinetica ed un cambiamento della traiettoria originaria. Un fotone di energia pari all'energia persa dall'elettrone è quindi emesso come risultato di questa decelerazione. Lo spettro energetico derivante dal bremsstrahlung è continuo, i fotoni assumono con continuità tutti i valori possibili di energia fino al valore massimo ottenuto quando l'elettrone perde tutta l'energia cinetica a sua disposizione. La forza coulombiana aumenta con l'inverso del quadrato della distanza, quindi elettroni che passano a distanze relativamente grandi dal nucleo perdono meno energia in quanto risentono meno della forza attrattiva di quanto non lo siano elettroni che passano a distanze minori.

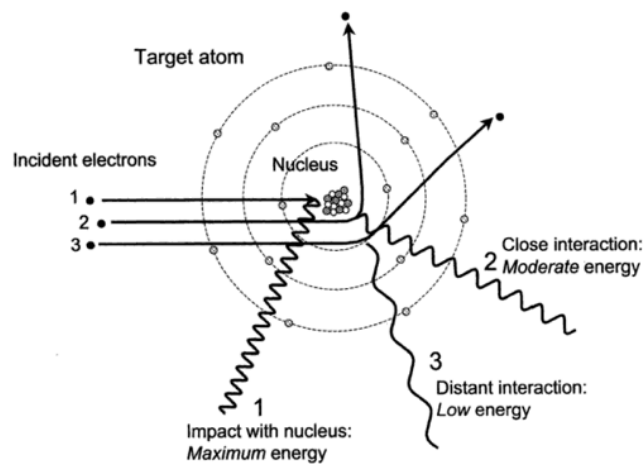


Figura 1.2: radiazione da frenamento, possibili casi

La figura successiva mostra la distribuzione dei fotoni-x in funzione dell'energia. In assenza di filtro, la relazione tra numero di fotoni prodotti ed energia è lineare decrescente con un valore massimo di energia determinato dalla differenza di potenziale applicata di picco tra anodo e catodo(kVp).

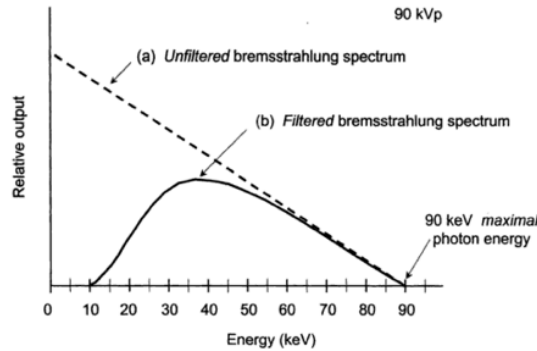


Figura 1.3: Spettro raggi-x da bremsstrahlung

$$eV_{max} = E_{max} = hc/\lambda_{min}$$

In presenza di filtro i fotoni a bassa energia hanno più probabilità di essere assorbiti rispetto ai fotoni di energia più alta; ne deriva una distribuzione il cui picco varia da 1/3 ad 1/2 del valore massimo di energia.

Il rapporto tra la perdita di energia per radiazione e quella persa per collisione è descritto dalla seguente formula:

$$\frac{\text{Energia persa per emissione}}{\text{Energia persa per collisioni}} = \frac{E_k Z}{820000}$$

dove:

- E_k è l'energia cinetica dell'elettrone incidente misurata in keV
- Z è il numero atomico del bersaglio

Ad esempio: per elettroni di 100keV che bombardano un elettrodo bersaglio di tungsteno($Z=74$) il rapporto tra le due quantità è circa pari all'1%. Il meccanismo di produzione dei raggi-x potrebbe sembrare inefficiente, ma come si è già detto è sufficiente per gli usi diagnostici.

1.4.2 Radiazione caratteristica

Sebbene il processo del bremsstrahlung sia quello più probabile, è possibile che un elettrone interagisca con gli elettroni atomici del bersaglio. Quando l'energia dell'elettrone incidente è maggiore dell'energia di ionizzazione di un elettrone atomico è possibile che l'elettrone venga espulso dalla propria orbita. Per un elettrone di una shell più esterna è energeticamente favorevole riempire la vacanza appena venutasi a creare. Nella transizione l'elettrone fa una transizione verso un'orbita con energia di legame maggiore, l'energia in eccesso è liberata come fotone-x caratteristico. La parola caratteristica sta ad indicare il fatto che l'energia liberata come fotone è unica di ogni dato elemento dipendendo appunto dalla differenza tra le energie di legame che sono caratteristiche di ogni elemento. Ad esempio per un elettrone che salta dall'orbita L sull'orbita K è emesso un fotone-x di energia:

$$E_{k,shell} - E_{L,shell} = 69.5 \text{ keV} - 10.2 \text{ keV} = 59.3 \text{ keV}$$

Lo spettro energetico totale che si osserva è la sovrapposizione dei picchi sulla curva continua; l'assenza di alcuni picchi a bassa energia è dovuta all'effetto del filtro, mentre quelli ad energia più alta essendo meno probabili sono affogati dagli eventi di bremsstrahlung.

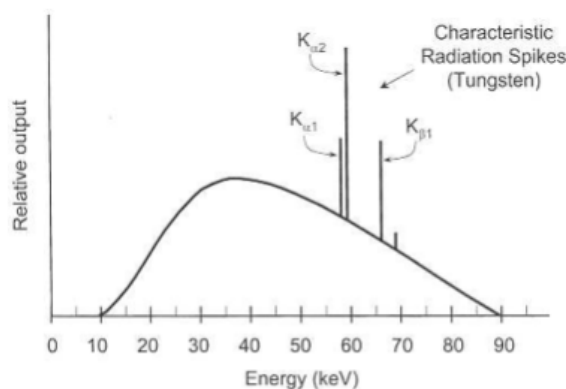


Figura 1.4: Spettro raggi-x dovuto a bremsstrahlung e radiazione caratteristica

La distribuzione energetica dei raggi-x è influenzata da alcuni fattori quali:

- Differenza di potenziale tra anodo e catodo

- corrente di tubo
- corrente di filamento
- filtri utilizzati

La corrente di filamento è quella corrente che passa attraverso il filamento facendolo riscaldare e inducendo l'emissione di elettroni per effetto termoionico. A valori troppo bassi di tensione applicata sono emessi più elettroni di quanti effettivamente ne possano venir trasportati verso l'anodo creando dunque una zona di carica spaziale e la corrente di tubo prodotta si dice *limitata da carica spaziale*. Se invece la corrente di filamento è troppo bassa vengono prodotti pochi elettroni e nonostante si aumenti la ddp, non si ha un incremento significativo di corrente di tubo; in questo caso si usa dire che la corrente di tubo è *limitata dall'emissione del filamento*. La corrente di tubo è quella responsabile della produzione di raggi-x, in quanto sono gli elettroni che incidono contro il bersaglio. Ad esempio, supponiamo di voler calcolare quanti elettroni incidono su un bersaglio sapendo che la corrente di tubo è di 200 mA e il tubo opera per una durata di 0.1 s:

$$(200mA) * (0.1s) = 20 * (1mAs) = (20 * 10^{-3}) \frac{[Coulomb]}{[s]} [s]$$

Ricordando che in 1 Coulomb di carica ci sono $6,25 * 10^{18}$ elettroni otteniamo dunque:

$$\frac{(20 * 10^{-3}) 6,25 * 10^{18} [Coulomb] [elettroni]}{[Coulomb] [s]} [s] = 3.125 * 10^{17} elettroni$$

Il numero di fotoni prodotti è proporzionale agli elettroni incidenti sul bersaglio e quindi al prodotto tra corrente di tubo e tempo di esposizione.

1.4.3 L'importanza della filtrazione

I fotoni a bassa energia sono solamente dannosi per il paziente in quanto vengono totalmente assorbiti dagli organi del corpo umano e non portano nessuna informazione utile per la formazione dell'immagine. Per questo è necessario anteporre sulla finestra di uscita del tubo radiogeno un filtro di rame o alluminio in modo che vengano assorbiti i fotoni di bassa energia. Si dice allora che il fascio ne esce *indurito* in quanto all'aumentare dello spessore del filtro si elimina la componente dello spettro a bassa energia e il valore medio della distribuzione assume valori maggiori.

1.4.4 La tensione di alimentazione

La corrente di tubo dipende anche dalla tensione di alimentazione. Questa non solo è responsabile del numero di fotoni prodotti (a valori maggiori di tensione corrispondono spettri di area maggiore), ma anche della massima energia che essi possono assumere. L'alimentazione è fornita mediante tensione alternata molto spesso rettificata in continua.

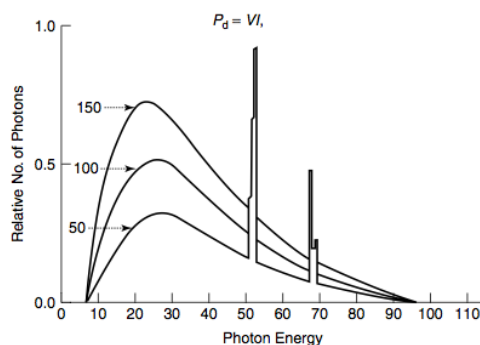


Figura 1.5: Distribuzione in energia al variare della tensione di alimentazione: 50,100,150 kVp

1.4.5 Collimazione del fascio

La qualità dell'immagine dipende da quanto una sorgente di fotoni possa essere considerata puntiforme. La macchia focale, cioè l'area dalla quale emergono i raggi-x dipende dalla dimensione del fascio elettronico che incide sul bersaglio. Questo a sua volta dipende dalle dimensioni del filamento catodico. Ovviamente più è grande l'area del filamento, più sarà maggiore il numero di elettroni prodotti nell'unità di tempo e minore sarà il tempo di esposizione a parità di fotoni prodotti. E' chiaro quindi che la progettazione del tubo deve essere fatta tenendo in considerazione tutti questi parametri e trovando il giusto compromesso in virtù anche della salute del paziente. Per ottenere immagini dettagliate bisogna inclinare l'anodo di un angolo θ rispetto all'asse perpendicolare alla direzione del fascio. Tipici valori di θ sono compresi tra 7 e 20 gradi. In questo modo la macchia focale efficace è:

$$a = A \sin \theta$$

dove A è la macchia focale reale.

La larghezza della macchia focale così come l'angolo anodico sono determinati in base al tipo di indagine clinica: sono disponibili infatti tubi a doppio filamento.

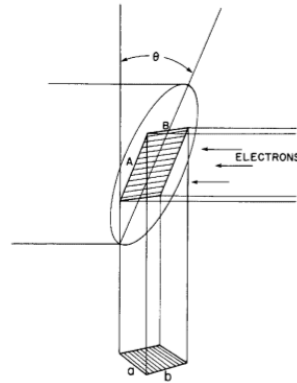


Figura 1.6: principio del focus lineare

1.4.6 L'effetto tacco

Una conseguenza dell'inclinazione di pochi gradi dell'anodo è conosciuta con il nome di *effetto tacco*. I raggi x che si trovano dal lato dell'anodo vengono attenuati maggiormente (percorrono un cammino maggiore) rispetto a quelli che escono dal lato del catodo.

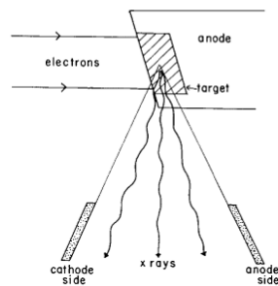


Figura 1.7: Effetto tacco

Ne consegue che il fascio ha maggiore intensità da un lato (catodo) rispetto che sull'anodo. Il problema può essere corretto installando dei filtri per attenuare maggiormente una parte del fascio, oppure facendo posizionare il

paziente in modo che la componente del fascio ad energia maggiore colpisca gli organi più spessi.

1.5 Interazione dei raggi-x con il corpo

Il corpo umano è formato principalmente da tre tipologie di tessuti: muscoli, grassi e ossa. Inoltre è presente aria prevalentemente nella cavità toracica e in alcune zone del tratto gastrointestinale. Ognuno di essi differisce in densità, numero atomico efficace a seconda della composizione. Ad esempio i muscoli contengono una percentuale elevata di acqua, al contrario i grassi esibiscono un'alta concentrazione di elementi a basso Z come carbonio e idrogeno. Nella seguente tabella sono presenti i vari tessuti classificati al numero atomico efficace, densità, e densità elettronica.

<i>Material</i>	<i>Effective Atomic Number</i>	<i>Density (kg/m³)</i>	<i>Electron Density (electrons/kg)</i>
Air	7.6	1.29	3.01×10^{26}
Water	7.4	1.00	3.34×10^{26}
Muscle	7.4	1.00	3.36×10^{26}
Fat	5.9–6.3	0.91	$3.34\text{--}3.48 \times 10^{26}$
Bone	11.6–13.8	1.65–1.85	$3.00\text{--}3.10 \times 10^{26}$

A questo punto è lecito domandarsi che grado di discriminazione si possa ottenere tra tessuti che differiscono di poco. I fotoni a bassa energia ($< 35\text{keV}$) interagiscono prevalentemente per effetto fotoelettrico con un andamento proporzionale al cubo del numero atomico ($\propto Z^3$) e quindi possono essere usati per accentuare delle piccole differenze in tessuti molli. I fotoni di più alta energia ($\approx 100\text{keV}$) interagiscono prevalentemente per effetto Compton la cui probabilità di interazione è indipendente da Z (ma varia con la densità elettronica). Questi vengono utilizzati quando le strutture da radiografare hanno un contrasto intrinseco più elevato (ad esempio la struttura cassa toracica-aria).

Capitolo 2

Qualità delle immagini

2.1 Introduzione

Le immagini rappresentano un mezzo tramite il quale rappresentare un'informazione. Questa informazione può riguardare l'anatomia, lo stato, la funzionalità degli organi interni del paziente. Più è dettagliata e chiara l'informazione contenuta nell'immagine, più sarà facile formulare una diagnosi che sia priva di equivoci. Quasi sempre però la chiarezza dell'informazione può essere compromessa da alcuni fattori quali:

- contrasto;
- sfocamento;
- distorsioni e artefatti;
- rumore.

2.1.1 Contrasto

Il contrasto fisico (o intrinseco) è una misura della differenza nella composizione degli organi ad esempio per spessore, per numero atomico efficace, o per densità. Nel capitolo precedente abbiamo parlato di come i raggi-x vengano attenuati in maniera differente a seconda della composizione degli organi. Ad esempio possiamo definire il contrasto in termini di fluenza fotonica ($\phi = \text{num fotoni per unità di area}$):

$$C = \frac{\phi_2 - \phi_1}{\phi_1}$$

Consideriamo il semplice modello in figura: un fascio di fotoni attraversa un blocco di spessore t e coefficiente di assorbimento μ_B che può essere il

paziente o qualsiasi altra zona di non interesse; al suo interno, un blocchetto più piccolo di spessore x e di coefficiente di assorbimento μ_A rappresenta la nostra zona di interesse.

- ϕ_1 è il numero di fotoni che attraversano la regione di non interesse
 $\phi_1 = \phi_0 e^{-\mu_B t}$
- ϕ_2 è il numero di fotoni che attraversano la regione di interesse
 $\phi_2 = \phi_0 e^{-\mu_A x - \mu_B(t-x)}$

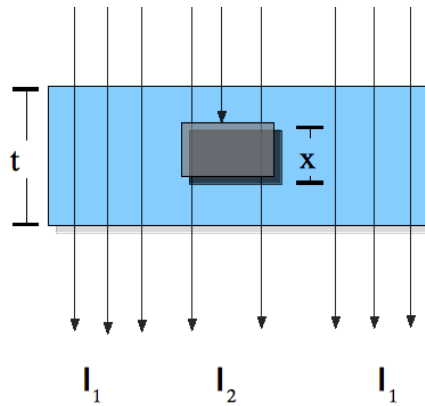


Figura 2.1: Assorbimento differenziale

Utilizzando le formule precedenti troviamo:

$$C = e^{-(\mu_b - \mu_a)x} - 1$$

da cui emerge banalmente che il contrasto tende a zero quando i due coefficienti di assorbimento sono molto simili tra loro. Oltre al contrasto intrinseco è opportuno definire un contrasto relativo all'immagine. L'immagine è il risultato della deposizione dell'energia dei raggi x su di un supporto sensibile. Un supporto piuttosto comune è la pellicola radiografica composta da una sottile base di materiale plastico con una emulsione sensibile alla radiazione. L'emulsione è composta da granuli di bromuro di argento sospesi in una gelatina. Al passaggio della radiazione i granuli vengono ionizzati col risultato dell'annerimento della pellicola in funzione della dose assorbita. Questa relazione è nota come *densità ottica* (OD) ed è definita come il logaritmo del rapporto tra intensità di luce iniziale e intensità di luce trasmessa:

$$OD = \log_{10}(I_0/I)$$

Idealmente la caratteristica tra densità ottica e dose assorbita dovrebbe essere lineare, in realtà le pellicole presentano una relazione del tipo indicato in figura:

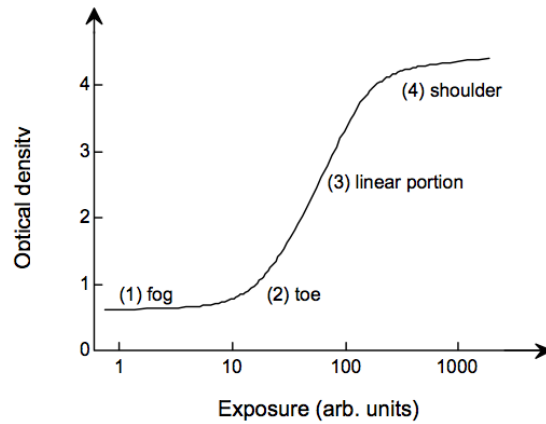


Figura 2.2: densità ottica in funzione della dose assorbita

Dal punto di vista della proporzionalità tra densità ottica e dose assorbita possiamo notare che la pellicola conserva un annerimento parziale (zona 1) anche se non vi è esposizione diretta a radiazione. L'energia depositata deve essere scelta in modo che tutte le immagini della radiografia cadano nella zona di linearità della curva. Inoltre all'aumentare dell'esposizione è presente una zona di saturazione (zona 4) in cui la pellicola è totalmente annerita e per ulteriori incrementi di energia depositata non si ha un significativo aumento dell'annerimento. La pendenza della curva nella regione lineare è chiamata *gamma*. E' evidente come per ottenere contrasti d'immagine maggiori bisogna ricorrere a pellicole con gamma particolarmente elevato. Infatti a piccole variazioni di esposizione corrispondono grandi variazioni nella densità ottica.

2.1.2 Il mezzo di contrasto

Al fine di migliorare l'assorbimento differenziale tra strutture adiacenti del corpo umano, talvolta è preferibile utilizzare un *mezzo di contrasto* in modo da rendere visibili dettagli che altrimenti non sarebbero apprezzati. Molti di questi mezzi di contrasto contengono *iodio* ($Z = 53$) o *bario* ($Z = 56$) poiché il coefficiente di assorbimento è notevolmente maggiore di quello degli organi ($Z_{eff} = 7$). I composti con iodio o bario risultano relativamente non tossici e possono essere utilizzati per un gran numero di indagini mediche. Inoltre

se si considera il range di energie che va da 33 a 88 Kev (che è proprio il range di energie utilizzato in diagnostica), questi esibiscono un coefficiente di attenuazione maggiore del piombo. A volte anziché aumentare la resistenza

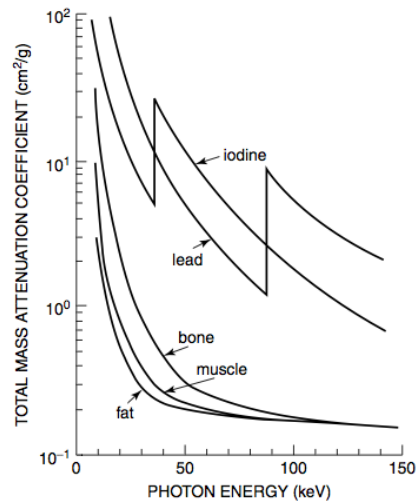


Figura 2.3: coefficiente di attenuazione massico per tessuti umani, piombo e iodio in funzione dell'energia

al passaggio dei raggi-x, si utilizzano dei mezzi di contrasto negativi capaci cioè di abbassare lo Z efficace di un tessuto. Tra questi sicuramente è l'aria il mezzo più utilizzato. La densità dell'aria è molto bassa e quindi i raggi x possono passare attraverso le strutture riempite con aria con una piccola attenuazione. In questo modo si riesce a migliorare la visibilità delle strutture all'interno di cavità riempite con l'aria.

2.1.3 Sfocatura

In ogni immagine i contorni degli oggetti non sempre sono ben definiti e nitidi ma piuttosto sono sfocati. L'effetto di sfocatura è una conseguenza di più fattori che contribuiscono individualmente alla perdita di dettaglio in una immagine. Possiamo distinguere infatti:

- sfocatura geometrica
- sfocatura dovuta al soggetto
- sfocatura dovuta al movimento
- sfocatura dovuta al detector

Sfocatura geometrica

L'ombra degli oggetti proiettata da una sorgente è nitida soltanto se questa è puntiforme. Nel caso in cui questa la sorgente ha una dimensione finita, l'ombra proiettata non ha contorni ben definiti, ma presenta dei bordi di penombra. Questa è dovuta alla parziale illuminazione delle zone corrispondenti al bordo dell'ombra. Se due oggetti sono molto vicini, può essere difficile delineare in modo preciso i contorni di questi. Le prime due foto in figura rappresentano questi due casi:

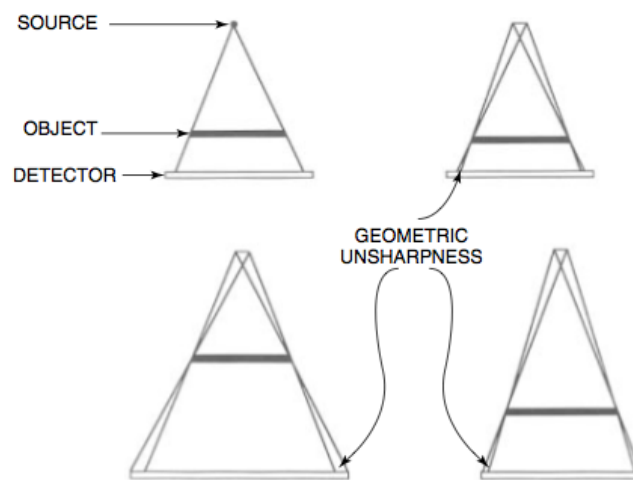


Figura 2.4: sfocatura legata a fattori geometrici

L'effetto può essere più o meno evidente a seconda della distanza tra sorgente e oggetto. Per ridurre l'effetto è infatti necessario aumentare la distanza sorgente-paziente.

Sfocatura del soggetto

Agli occhi di un detector non sempre le strutture presentano contorni ben definiti. Spesso una struttura è distinguibile dal resto mediante caratteristiche che variano gradualmente con la distanza. Può succedere che un organo presenti dei contorni arrotondati o di differente spessore. Lungo i bordi i fotoni percorrono camini più corti rispetto alla distanza percorsa in un'altra parte del tessuto. Se registriamo la densità ottica noteremo un aumento graduale. In definitiva, per ottenere le migliori prestazioni bisogna trovare il giusto compromesso tra tutte le variabili in gioco.

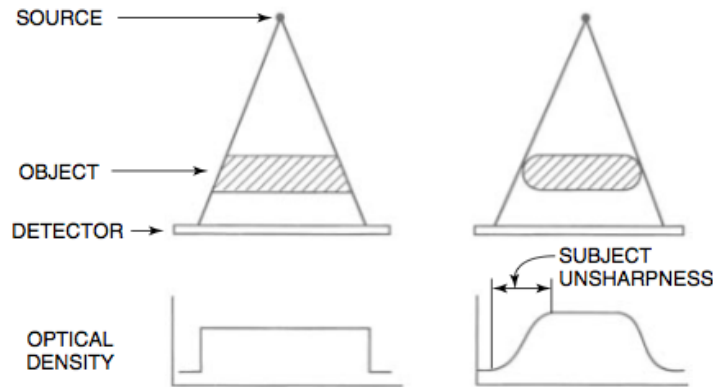


Figura 2.5: sfocatura dovuta al soggetto

Sfocatura dovuta al movimento

La sfocatura dovuta al movimento è una delle cause maggiori alla sfocatura totale dell'immagine. Come sappiamo il movimento è il risultato sia di azioni volontarie che di azioni involontarie. Il movimento fa sì che uno stesso oggetto sia proiettato in diverse aree del detector durante la formazione dell'immagine. Come i contorni risultano allargati su una zona finita dell'immagine. L'effetto della sfocatura può essere ridotto diminuendo i tempi di esposizione, ma in questo caso è necessario aumentare la corrente di tubo per ottenere la stessa intensità di fascio e quindi adoperare un filamento di dimensioni maggiori. Così facendo però si aumenta la macchia focale e si introduce una componente di sfocatura dovuta al sorgente di dimensione finita.

Sfocatura dovuta al detector

La funzione del detector (sia esso digitale o semplicemente pellicola radiografica) è quella di convertire l'informazione proveniente dal fascio di raggi x (energia) in un'altra grandezza fisica (segnale di tensione) o semplicemente in una caratteristica che sia direttamente visibile all'occhio umano come l'annerimento della pellicola. Tuttavia ci sono alcune limitazioni determinate dall'area e dal numero di elementi sensibili del detector. Aumentando l'area degli elementi sensibili, si aumenta la sensibilità, ma al tempo stesso aumenta anche la sfocatura in quanto diminuisce la risoluzione spaziale.

2.1.4 Rumore e modello di Rose

Tutto ciò che è presente in una immagine ma che non porta informazione utile o compromette la visualizzazione di caratteristiche critiche alla valutazione della diagnosi è chiamato *rumore*. Il rumore può essere dovuto alla non uniformità del fascio di radiazioni, o può essere semplicemente causata dall'offuscamento di zone di interesse da altri organi. Inoltre esiste una componente di rumore legata alla natura quantistica dei fotoni.

L'informazione contenuta in una immagine è proporzionale al numero di fotoni rivelati che vanno a formare l'immagine stessa. Data la natura statistica della luce, può essere utile sviluppare un semplice modello basato sulla statistica poissoniana degli eventi per calcolare il rapporto segnale/rumore all'interno di una immagine in condizioni di basso contrasto. L'obiettivo del modello è quello trovare la condizione minima affinché si possa distinguere un oggetto di interesse dal background (fondo). Assumiamo che sia i fotoni che compongono il fondo che quelli che formano l'oggetto di interesse siano caratterizzati da una distribuzione poissoniana. La distribuzione di Poisson è una derivazione della distribuzione binomiale in cui la probabilità di successo p è molto piccola e il numero di eventi è particolarmente elevato e inoltre gli eventi sono scorrelati tra loro. Per probabilità di successo si intende la probabilità che avvenga l'interazione con il detector, cioè che il fotone vada a far parte dell'immagine. Supponiamo che l'immagine del nostro oggetto di interesse sia formata da un valor medio di \bar{q}_0 fotoni per unità di area, mentre il background ha un valor medio di \bar{q}_b fotoni per unità di area, allora il contrasto che ne risulta è pari a:

$$C = \frac{(\bar{q}_b - \bar{q}_0)}{\bar{q}_b}$$

Per un oggetto uniforme di area A possiamo definire *segnale* il prodotto tra la differenza dei fotoni per unità di area per l'area stessa dell'oggetto:

$$S = (\bar{q}_b - \bar{q}_0)A$$

Definiamo *rumore* la deviazione standard del numero di fotoni per unità di area (nella zona di background) σ_b , che nel caso di statistica poissoniana è proprio uguale alla radice quadrata del valore atteso:

$$N = \sqrt{A\bar{q}_b}$$

Pertanto il rapporto segnale rumore è pari a:

$$S/N = \frac{A(\bar{q}_b - \bar{q}_0)}{\sqrt{A\bar{q}_b}} = C\sqrt{A\bar{q}_b}$$

Sperimentalmente si è trovato che il minimo valore del rapporto segnale/rumore necessario per distinguere un oggetto dal background varia da 5 a 7 (criterio di Rose).

2.1.5 Distorsione

In una immagine, la distorsione è dovuta ad un diverso ingrandimento degli organi. Le strutture che si trovano più vicine alla sorgente vengono ingrandite maggiormente rispetto alle strutture che si trovano più distanti. Infatti definito l'ingrandimento come rapporto tra dimensione dell'oggetto nell'immagine e dimensione reale otteniamo:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{\text{dimensione oggetto su immagine}}{\text{dimensione reale oggetto}} \\
 &= \frac{\text{distanza sorgente-detector}}{\text{distanza sorgente-oggetto}}
 \end{aligned}$$

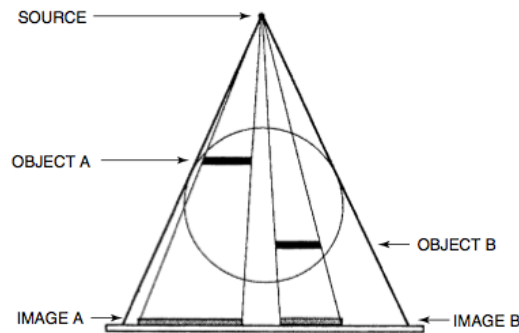


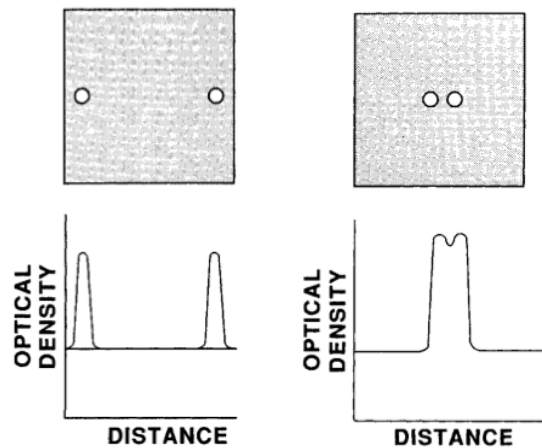
Figura 2.6: distorsione dovuta ad un diverso ingrandimento

Nella figura si può notare come due oggetti di uguale dimensione siano effettivamente visti come oggetti di dimensioni diverse nell'immagine a causa della loro distanza dalla sorgente. La distorsione può essere dovuta anche alla non uniformità di risposta del supporto sensibile.

2.2 Risoluzione spaziale

Per *risoluzione spaziale* si intende la minima distanza tra due oggetti tale che questi possano essere riconosciuti ancora come oggetti separati in una

immagine. Un modo per valutare la risoluzione spaziale di un sistema di immagine può essere quello di praticare due forellini in una lastra di piombo opaca alle radiazioni e vedere l'immagine ottenuta proiettando un fascio di raggi x su di essa. Se i due forellini sono a grande distanza l'uno dall'altro, si possono distinguere i due oggetti come entità separate. Al diminuire della distanza dei due fori, i bordi sfocati iniziano a sovrapporsi e non si è più in grado di distinguere correttamente i due oggetti come una singola entità.



Un modo per descrivere formalmente la risoluzione spaziale è utilizzando la *point spread function* che descrive la risposta del sistema d'immagine ad un oggetto puntiforme. La point spread function è largamente utilizzata in teoria dei segnali in quanto rappresenta la risposta del sistema alla sollecitazione di una delta di Dirac bidimensionale

$$\delta(x, y) = \delta(x)\delta(y)$$

da cui

$$\text{psf}(x, y) = T\{\delta(x, y)\}$$

La point spread function rappresenta la risposta impulsiva del sistema; conoscendo la point spread function, qualsiasi segnale in uscita può essere calcolato come convoluzione tra segnale in entrata e risposta impulsiva:

$$g(x, y) = f(x, y) \otimes \text{psf}(x, y)$$

Definiamo inoltre la *modulation transfer function* (MTF o anche funzione di trasferimento) il modulo (quantità reale) della trasformata di Fourier bidimensionale della point spread function:

$$MTF(u, v) = \mathbf{F}[\text{psf}(x, y)]$$

Per le proprietà della trasformata di Fourier, sappiamo che la MTF è uguale al rapporto tra spettro del segnale in uscita e spettro del segnale in entrata:

$$MTF(u, v) = \frac{|G(u, v)|}{|F(u, v)|}$$

La funzione di trasferimento è una funzione particolarmente importante in teoria dei segnali in quanto se un sistema è dotato di più componenti attraverso i quali il segnale viene elaborato, si può conoscere la funzione di trasferimento totale come prodotto delle singole funzioni di trasferimento:

$$MTF_{tot}(u, v) = MTF_1(u, v) \cdot MTF_2(u, v) \cdot \dots \cdot MTF_n(u, v)$$

Tralasciando per un momento le questioni di carattere matematico, che la point spread function è l'immagine che si otterrebbe facendo un piccolo foro all'interno di una lastra opaca alle radiazioni. Al diminuire delle dimensioni del foro l'immagine ottenuta dipenderà non più dall'oggetto (foro) ma sarà funzione esclusivamente dalle caratteristiche del sistema. E' vero però che fori molto piccoli trasmettono pochi fotoni per cui l'immagine risulta poco luminosa e molto rumorosa. Il problema può essere aggirato praticando delle fenditure. In questo la precisione dell'immagine non è più limitata dal ristretto numero di fotoni usati nella determinazione della stessa. Matematicamente parlando, l'oggetto *linea* può essere rappresentato da una delta di Dirac bidimensionale (uno spillo) integrata lungo una dimensione:

$$\text{linea}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\delta(y)dy$$

La *line spread function* (lsf) rappresenta la risposta del sistema ad un segnale del tipo appena descritto, ovvero è l'immagine che si formerebbe se praticassimo una fenditura lungo la lastra di piombo. Si dimostra che la *lsf* è la *psf* integrata lungo una dimensione:

$$\text{lsf}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{psf}(x, y)dy$$

Sebbene la funzione di trasferimento (MTF) è la trasformata di Fourier della *psf*, si può dimostrare che la trasformata di Fourier della *lsf* è proprio la MTF calcolata lungo una frequenza spaziale:

$$\mathbf{F}[\text{lsf}(x)] = MTF(u, 0)$$

Se il sistema di immagine è isotropico ovvero la risposta del sistema è uguale in ogni punto dello spazio, la MTF calcolata in una direzione è uguale

a quella calcolata nell'altra. Le quantità appena definite come la *psf* o la *lsf* sono funzioni che permettono di descrivere matematicamente la bontà della risoluzione spaziale in un sistema d'immagine. A curve più strette corrispondono prestazioni migliori e quindi una migliore abilità nel distinguere i dettagli:

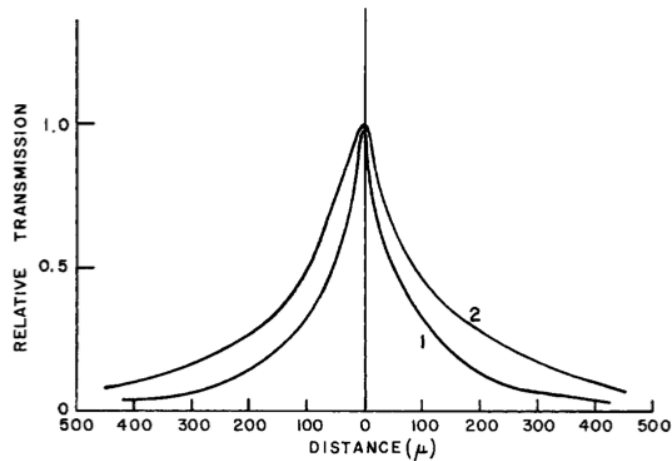


Figura 2.7: Sfocatura introdotta dal sistema d'immagine, il sistema 1 garantisce una migliore risoluzione spaziale.

Un altro modo per valutare la risoluzione spaziale di un sistema è utilizzando la MTF. Se volessimo valutare la banda passante di un amplificatore andremmo ad eccitare il sistema con un oscillatore sinusoidale di frequenza e ampiezza conosciuta e misureremmo l'attenuazione che il segnale ha subito. Potremmo ripetere la misura aumentando sempre più la frequenza dell'oscillatore; a frequenze maggiori assisteremmo ad una attenuazione via via maggiore dell'ampiezza dell'onda in uscita a causa della banda in frequenza limitata dai componenti elettronici e della tecnologia utilizzata. Un fenomeno simile accade anche per i sistemi di immagine. Anziché utilizzare un oscillatore di frequenza variabile si usa un oggetto contenente una serie di fenditure la cui distanza decresce sempre più rapidamente.

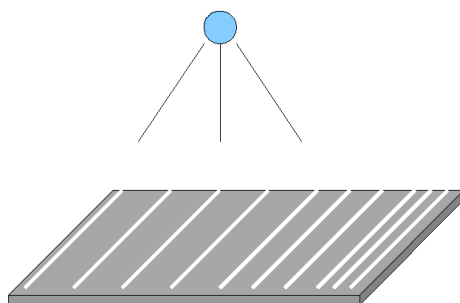


Figura 2.8: bar phantom a strisce verticali

La trasmissione dei raggi x può essere rappresentata come un'onda quadra (a seconda che la radiazione sia trasmessa o attenuata) con frequenza spaziale sempre più alta al decrescere della separazione delle fenditure.



Figura 2.9: funzione in ingresso

Il sistema d'immagine non riesce a replicare il pattern ad onda quadra a causa della sfocatura che introduce sugli oggetti. La sfocatura non interferisce molto quando le fenditure sono separate da una distanza maggiore della sfocatura, ma inizia a compromettere l'immagine quando la distanza diminuisce (cioè a frequenze spaziali più elevate):



Figura 2.10: funzione in uscita

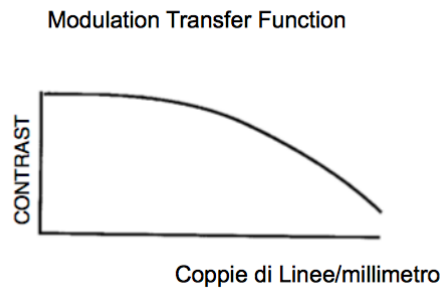


Figura 2.11: funzione MTF

Se ora calcoliamo il contrasto come differenza tra picco e valle, ci accorgiamo che nel caso della funzione in ingresso questo valore è sempre costante, pari cioè al 100%. Nel segnale in uscita, all'aumentare della frequenza spaziale la differenza tra picco e valle si assottiglia sempre più. L'MTF è quindi la funzione contrasto espressa in funzione della frequenza, dove per frequenza si intende il numero di linee per millimetro.

Capitolo 3

Esercizi

3.1 Sorgenti gamma

Consideriamo il decadimento radioattivo di una sorgente gamma. Supponiamo che in una disintegrazione vengano emessi n_1 fotoni di energia E_1 e n_2 fotoni con energia E_2 . Il valore di energia per disintegrazione è dato da :

$$E_d[\text{energia/disinteg}] = n_1 E_1 + n_2 E_2 [\text{fotoni/disinteg}][\text{energia/fotone}]$$

L'energia irradiata è quindi l'energia per unità disintegrazione per il numero di disintegrazioni:

$$E[\text{energia}] = E_d[\text{energia/disinteg}]N[\text{numero disintegrazioni}]$$

Calcoliamo ora l'attività di una sorgente gamma e rapportiamola con il numero di fotoni prodotti. Se indico con ϕ il numero di fotoni al secondo posso scrivere:

$$\phi[\text{fotoni/secondo}] = \phi_d[\text{fotoni/disintegrazione}]N_s[\text{disintegrazioni/secondo}]$$

Il numero di disintegrazioni al secondo è la misura dell'attività di una sorgente radioattiva che indicheremo con A . Se si ha un solo evento radiativo (un solo fotone) per ogni disintegrazione, il numero di fotoni al secondo equivale all'attività della sorgente:

$$\phi = A$$

L'attività si misura in Becquerel ed 1 Becquerel (Bq) equivale ad una disintegrazione al secondo:

$$1Bq = 1[\text{disintegrazione/secondo}]$$

Altrimenti basta moltiplicare l'attività per il numero di fotoni che avvengono in una disintegrazione:

$$\phi[\text{fotoni/secondo}] = A[\text{disintegrazioni/secondo}] \phi_d[\text{fotoni/disintegrazione}]$$

Veniamo ora all'energia. Se i fotoni prodotti fossero tutti della stessa energia potremmo scrivere:

$$E_s \frac{[\text{energia}]}{[\text{secondo}]} = \phi_d \frac{[\text{fotoni}]}{[\text{disintegrazione}]} A \frac{[\text{disintegrazioni}]}{[\text{secondo}]} E_f \frac{[\text{energia}]}{[\text{fotone}]}$$

Nel caso in cui abbiamo un numero n_i di fotoni di radiazione di energia E_i che vengono emessi durante una disintegrazione possiamo scrivere:

$$E_s \frac{[\text{energia}]}{[\text{secondo}]} = A \frac{[\text{disintegrazioni}]}{[\text{secondo}]} \sum_i n_i \frac{[\text{fotoni}]}{[\text{disintegrazione}]} E_i \frac{[\text{energia}]}{[\text{fotone}]}$$

Se la sorgente gamma è puntiforme e irradia in tutte le direzioni, i fotoni attraversano una sfera di superficie $4\pi R^2$. Dividendo quindi l'espressione precedente per la superficie sferica si ottiene il rateo di fluena di energia Ψ ovvero:

$$\Psi \frac{[\text{Energia}]}{[\text{area}][\text{secondo}]}$$

Calcoliamo ora il rateo di esposizione. Dalla relazione che lega esposizione e dose assorbita possiamo scrivere

$$\dot{X} = \frac{e}{w} \dot{D} = \frac{e[C]}{w[eV]} \Phi \frac{[\text{fotoni}]}{[m^2][s]} E_\gamma [eV] \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) \frac{[m^2]}{[kg]}$$

Al posto del prodotto tra fotoni e energia per fotone mettiamo la formula del rateo di fluena di energia calcolato precedentemente. Inoltre il coefficiente di assorbimento varia poco con l'energia quindi possiamo portarlo fuori dalla sommatoria.

$$\dot{X} = \frac{e[C]}{w[\text{energia}]} \frac{A}{4\pi R^2} \frac{[\text{disintegrazioni}]}{[\text{secondo}][m^2]} \sum_i n_i \frac{[\text{fotoni}]}{[\text{disintegrazione}]} E_i \frac{[\text{energia}]}{[\text{fotone}]} \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) \frac{[m^2]}{[kg]}$$

Se calcoliamo il rateo di esposizione per unità di attività ad un metro di distanza dalla sorgente, otteniamo una costante dipendente esclusivamente dal tipo di sorgente utilizzata che viene chiamata costante *gamma*:

$$\Gamma = \frac{\dot{X}}{A} @ 1\text{metro}$$

che può essere espressa secondo due unità di misura :

$$\Gamma = \frac{[C/kg][m^2]}{[h][MBq]}$$

o alternativamente

$$\Gamma = \frac{[R][m^2]}{[h][Ci]} \text{ (solitamente si denota con rhm)}$$

Conoscendo gamma è quindi possibile calcolare il rateo di esposizione a qualunque distanza con la formula:

$$\dot{X} = \frac{\Gamma A}{d^2}$$

3.2 Metodo M.I.R.D. per il calcolo della dose assorbita in un organo

Veniamo ora al calcolo del rateo di dose assorbita nel caso di una contaminazione interna da sorgente gamma radioattiva. Il rateo di dose è l'energia assorbita da un chilogrammo di massa nell'unità di tempo :

$$\dot{D} = \frac{E_{ass} [energia]}{Mt [s][Kg]}$$

Consideriamo il caso di una sorgente radioattiva che emette fotoni gamma. L'energia assorbita è proporzionale al numero di fotoni al secondo emessi dalla sorgente per l'energia dei fotoni pesata da un coefficiente φ che dà il rapporto tra energia assorbita dall'organo e l'energia emessa dalla sorgente, ovvero:

$$\varphi = \frac{\text{energia assorbita dall'organo}}{\text{energia emessa dalla sorgente}}$$

Ovviamente φ è un numero che varia a seconda della radiazione. Ad esempio per i beta emettitori φ è circa pari all'unità in quanto la regione ha dimensioni molto maggiori del range dei beta, e quindi i beta emessi da una regione vengono assorbiti completamente nella stessa. I valori di φ sono tabulati per energie, organi di dimensioni differenti. Possiamo quindi scrivere:

$$\dot{D} = \frac{A}{M} \sum_i n_i E_i \varphi_i$$

Dato che A è l'attività espressa in disintegrazioni al secondo (Bq) \dot{D} ha come unità di misura Gy/s e risulta:

$$\dot{D} \frac{[Gy]}{[s]} = \frac{A [Bq]}{M [Kg]} \sum_i n_i \frac{[fotoni]}{[disintegrazione]} E_i \varphi_i [MeV] 1,6 \cdot 10^{-13} \frac{[J]}{[MeV]}$$

Ponendo

$$\Delta_i = 1,6 \cdot 10^{-13} n_i E_i \frac{[Gy][kg]}{[Bq][s]}$$

possiamo scrivere:

$$\dot{D} = \frac{A}{M} \sum_i \Delta_i \varphi_i$$

Se ora vogliamo esprimere la dose in rad, la massa in grammi, il tempo in ore e l'attività in μCi non ci resta che moltiplicare il coefficiente Δ_i per i fattori di conversione:

$$1,6 \cdot 10^{-13} \frac{[Gy][kg]}{[Bq][s]} = 1,6 \cdot 10^{-13} \frac{10^2 \cdot 10^3}{2,7 \cdot 10^{-5} \cdot 2,78 \cdot 10^{-4}} \frac{[rad][g]}{[\mu Ci][h]} = 2,13 \frac{[rad][g]}{[\mu Ci][h]}$$

Il rateo di dose in rad/h è

$$\dot{D} = 2,13 \frac{A}{M} \sum_i n_i E_i \varphi_i$$

Per sapere la dose è necessario integrare l'attività nel tempo. L'attività decade nel tempo con un andamento esponenziale decrescente. L'integrale dell'attività nel tempo è noto come *attività cumulativa*.

$$\tilde{A} = \int_0^\infty A(t) dt = \int_0^\infty f A_0 e^{-\lambda_E t} dt$$

dove $f A_0$ indica la frazione f di attività iniziale A_0 che entra in un dato organo il quale si comporta come regione sorgente di radiazioni. λ_E è la costante di decadimento efficace ovvero è la somma della costante di decadimento fisico e della costante di decadimento biologica. Dunque:

$$\tilde{A} = \int_0^\infty f A_0 e^{-\lambda_E t} dt = 1,443 f A_0 T_e = \tau A_0$$

s τ è detto *tempo di residenza*